GEOMETRIA IPERBOLICA 2021/22
ESERCIZI BISETTIMANALI

È lecito risolvere un esercizio usando quelli precedenti.

1. Esercizi del 9 ottobre

Esercizio 1.1. Mostra che dato un punto $P \in \mathbb{H}^n$ e un sottospazio $S \subset \mathbb{H}^n$ disgiunti esiste un'unica retta r passante per P ortogonale a S.

Esercizio 1.2. Mostra che $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ agisce transitivamente sulle triple di punti distinti in $\partial\mathbb{H}^n$. Mostra che non agisce transitivamente sulle quadruple.

Esercizio 1.3. Mostra che per ogni $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \frac{\pi}{2}$ con $\alpha+\beta+\gamma < \pi$ esiste un unico triangolo in $\mathbb{H}^2$ (a meno di isometria) con questi angoli interni.

Esercizio 1.4. Mostra che i triangoli in $\mathbb{H}^2$ sono uniformemente sottili: esiste un $K > 0$ tale che per qualsiasi triangolo $\Delta \subset \mathbb{H}^2$, qualsiasi punto p in un lato di Δ è a distanza $< K$ da uno degli altri due lati di Δ.

Esercizio 1.5. Sia $\Delta \subset \mathbb{H}^2$ un triangolo e l la lunghezza di un lato qualsiasi di Δ. Mostra che $\mathrm{Area}(\Delta) < l$.

Esercizio 1.6. Considera un triangolo iperbolico con angoli $\alpha, \beta, \frac{\pi}{2}$ e siano a, b, c le lunghezze dei lati oppposti a questi angoli. Mostra che

$$\cosh c = \cosh a \cosh b.$$

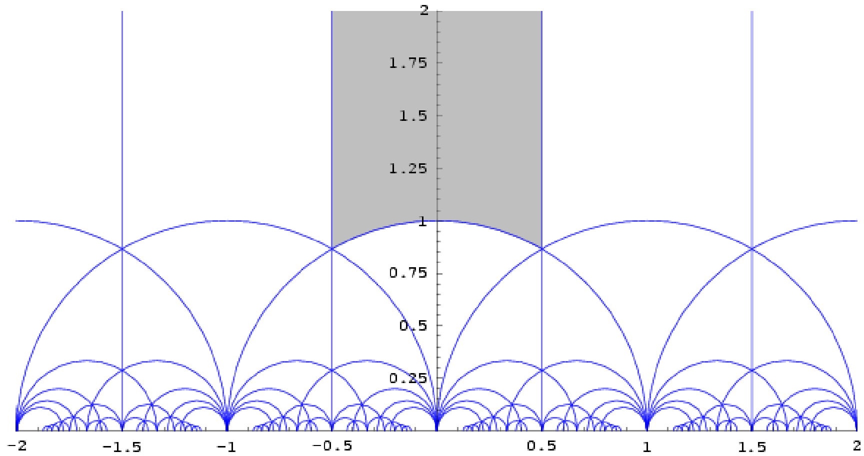
Esercizio 1.7. Mostra che due isometrie $f, g \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ non banali commutano $\iff$ hanno gli stessi punti fissi in $\overline{\mathbb{H}^2}$.

Esercizio 1.8. Sia f una isometria parabolica di $\mathbb{H}^n$. Mostra che esiste sempre un piano iperbolico invariante per f.

Esercizio 1.9. Sia f una isometria iperbolica di $\mathbb{H}^4$. Mostra che esiste sempre un piano iperbolico invariante per f.

2. Esercizi del 23 ottobre

Esercizio 2.1. Mostra che il triangolo grigio T nella figura seguente è un dominio fondamentale per il sottogruppo discreto $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) < \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.



Esercizio 2.2. Considera l'omomorfismo $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}})$ indotto dall'omomorfismo naturale $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Sia $\Gamma(n) < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ il nucleo di questo omomorfismo. Mostra che $\Gamma(n)$ non contiene ellittici e quindi $\mathbb{H}^2/\Gamma(n)$ è una superficie iperbolica completa per ogni $n \geq 2$. Calcola l'area della superficie $S = \mathbb{H}^2/_{\Gamma(2)}$. Cerca di determinare il tipo topologico di S.

Esercizio 2.3. Sia $\Gamma < \mathbb{R}^2$ un gruppo di traslazioni generato da due vettori indipendenti. Mostra che un dominio di Dirichlet per Γ è generalmente un esagono e in casi particolari un quadrilatero.

Esercizio 2.4. Sia $M = \mathbb{H}^n/_\Gamma$ una varietà iperbolica di volume finito. Mostra che nessun elemento non banale di $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ commuta con tutti gli elementi di Γ.

Esercizio 2.5. Considera gli interi di Gauss $\mathbb{Z}[i] \subset \mathbb{C}$. Mostra che un dominio fondamentale per il gruppo discreto $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}[i]) < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) = \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ è l'insieme (nel modello del semispazio di $\mathbb{H}^3$) seguente:

$$D = \left\{ (x,y,z) \in H^3 \;\middle|\; x^2+y^2+t^2 \geq 1,\ -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2},\ 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

Esercizio 2.6. Determina un sottogruppo Γ del gruppo discreto $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}[i]) < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) = \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ che abbia indice finito e che non contenga elementi ellittici. La varietà iperbolica $M = \mathbb{H}^3/_\Gamma$ è compatta? Ha volume finito?

Esercizio 2.7. Sia $M = \mathbb{H}^n/_\Gamma$ una varietà iperbolica compatta. Considera l'insieme $S \subset \partial\mathbb{H}^n$ formato da tutti i punti che sono estremo di qualche asse di qualche trasformazione iperbolica di M. Mostra che S è denso in $\partial\mathbb{H}^n$.

Esercizio 2.8. Usiamo il modello dell'iperboloide. Data una matrice non banale $A \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n) = \mathrm{Isom}(I^n) = O^+(n,1)$, determina un criterio per capire se A è ellittica, parabolica o iperbolica.

3. ESERCIZI DEL 6 NOVEMBRE

Sia $S = S_g$ la superficie chiusa orientabile di genere $g > 1$. Indichiamo con $\mathscr{S}$ l'insieme delle curve semplici chiuse non banali su S a meno di isotopia e cambio del verso, con $i(a, b)$ l'intersezione geometrica di $a, b \in \mathscr{S}$, e con $T_a \in \mathrm{MCG}(S)$ il twist di Dehn lungo $a \in \mathscr{S}$.

Ogni classe di omologia $a \in H_1(S;\mathbb{Z}) := \pi_1(S)/[\pi_1(S), \pi_1(S)] \cong \mathbb{Z}^{2g}$ è rappresentata da una multicurva μ, che borda una sottosuperficie compatta orientata sse $a = 0$. Cambiando il verso di μ si ottiene $-a$, e $[\mu] + [\nu]$ è rappresentata dalla multicurva ottenuta risolvendo le singolarità di $\mu \cup \nu$.

Ci sono due azioni naturali $\mathrm{MCG}(S) \curvearrowright \mathscr{S}$ e $\mathrm{MCG}(S) \curvearrowright H_1(S;\mathbb{Z})$ date da $(F, a) \mapsto F(a) := [f(\gamma)]$, dove $F = [f]$ e $a = [\gamma]$ per qualche diffeomorfismo f e curva semplice chiusa / multicurva γ.

Esercizio 3.1. Dimostra che T_a ha ordine infinito. (Le azioni $\mathrm{MCG}(S) \curvearrowright \mathscr{S}$ o $\mathrm{MCG}(S) \curvearrowright H_1(S;\mathbb{Z})$ possono essere utili).

Esercizio 3.2. Dimostra che $F \in \mathrm{MCG}(S)$ commuta con T_a se e solo se $F(a) = a$, procedendo come segue:

(1) $T_a = T_b \iff a = b$,
(2) $T_{F(a)} = F T_a F^{-1}$.

Esercizio 3.3. Dimostra che

(1) $i(a, b) = 0 \iff T_a(b) = b \iff T_aT_b = T_bT_a$;
(2) $i(a, b) = 1 \implies T_aT_bT_a = T_bT_aT_b$.

Esercizio 3.4. Dimostra che il toro piatto ottenuto identificando i lati opposti di un esagono regolare corrisponde all'immagine del punto $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \in \mathbb{H}^2 = \mathrm{Teich}(S^1 \times S^1)$ nello spazio dei moduli.

Esercizio 3.5. Un'*involuzione iperellittica* è un elemento di ordine 2 di $\mathrm{MCG}(S)$ che agisce come $-\mathrm{id}$ su $H_1(S;\mathbb{Z})$. Dimostra che S ammette sempre un'involuzione iperellittica.

Esercizio 3.6. Sia m una metrica iperbolica su S. Dimostra che se $[f] \in \mathrm{MCG}(S)$ fissa $[m] \in \mathrm{Teich}(S)$, allora f è isotopa a un'isometria di (S, m).

Esercizio 3.7. A lezione abbiamo definito una topologia su $\mathrm{Teich}(S)$. Adatta questa definizione al caso del toro e dimostra che con tale topologia la bigezione $\mathrm{Teich}(S^1 \times S^1) \leftrightarrow \mathbb{H}^2$ è un omeomorfismo. (Si possono usare gli enunciati sul toro dal libro anche se non dimostrati a lezione).

Esercizio 3.8 (Dal libro, dove c'è un suggerimento)**.** Ricordiamo che la funzione $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ introdotta a lezione per il Lemma del Collare è definita così: dato l'unico quadrilatero con angoli in sequenza $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0, 0$ e un lato lungo l, allora $f(l)$ è la distanza tra il lato compatto e il suo opposto.

Dimostra che
$$\sinh f(l) = \frac{1}{\sinh \frac{l}{2}}.$$

4. ESERCIZI DEL 4 DICEMBRE

Esercizio 4.1. Costruisci una famiglia di superfici iperboliche compatte con un numero arbitrariamente alto di isometrie. Delinea una strategia per costruire una superficie iperbolica compatta che non abbia isometrie oltre all'identità.

Esercizio 4.2. Mostra che le rette che intersecano un compatto $K \subset \mathbb{H}^2$ formano un compatto in $\mathcal{G}$.

Esercizio 4.3. Siano $a, b, c, d \in \partial\mathbb{H}^2$ punti ordinati in senso antiorario. Mostra che la misura di Liouville del box $[a, b] \times [c, d] \subset \mathcal{G}$ formato dalle rette con estremi in $[a, b]$ e $[c, d]$ è il valore assoluto del birapporto di a, b, c, d.

Esercizio 4.4. Sia λ un insieme di rette disgiunte in $\mathbb{H}^2$. Mostra che λ è chiuso come sottoinsieme di $\mathbb{H}^2$ se e solo se lo è come sottoinsieme di $\mathcal{G}$.

Esercizio 4.5. Considera una superficie S_g con $g \geq 2$ ed una curva $\gamma \subset S_g$ omotopicamente non banale che la divide in due superfici S e S', ciascuna con bordo γ. Mostra che $i_* \colon \pi_1(S) \to \pi_1(S_g)$ indotta dall'inclusione è iniettiva.

Suggerimento: Usa la geometria iperbolica. □

Esercizio 4.6. Sia M una n-varietà iperbolica completa e $C \subset M$ un convesso. Mostra che $i_* \colon \pi_1(C) \to \pi_1(M)$ indotta dall'inclusione è un isomorfismo.

Suggerimento: Esamina la controimmagine $\tilde{C} \subset \mathbb{H}^2$ di C. □

Esercizio 4.7. Dimostra che l'insieme limite di un gruppo di Schottky in dimensione $n = 2$ è un insieme di Cantor.

Esercizio 4.8. Sia $M = \mathbb{H}^n/_\Gamma$ una n-varietà iperbolica completa. Mostra che se l'insieme limite $\Lambda = \Lambda(\Gamma)$ contiene almeno due punti allora il convex core

$$CC = (C(\Lambda) \cap \mathbb{H}^n)/\Gamma \subset M$$

è l'intersezione di tutti i convessi contenuti in M.